Matematikos vadovėlių vaidmuo lavinant matematinį mąstymą

Rimas Norvaiša (Vilnius universitetas)

2022 spalio 26 d.

Pristatymo planas

- Kaip lavinamas mąstymas 19 šalių 8 klasės matematikos vadovėliuose?
- Matematinis mąstymas lavinamas aiškinantis kodėl procedūra veikia taip, kaip veikia.
- Matematinis mąstymas lavinamas pagrindžiant ar įrodant užduoties atsakymą, o ne tik jį randant.

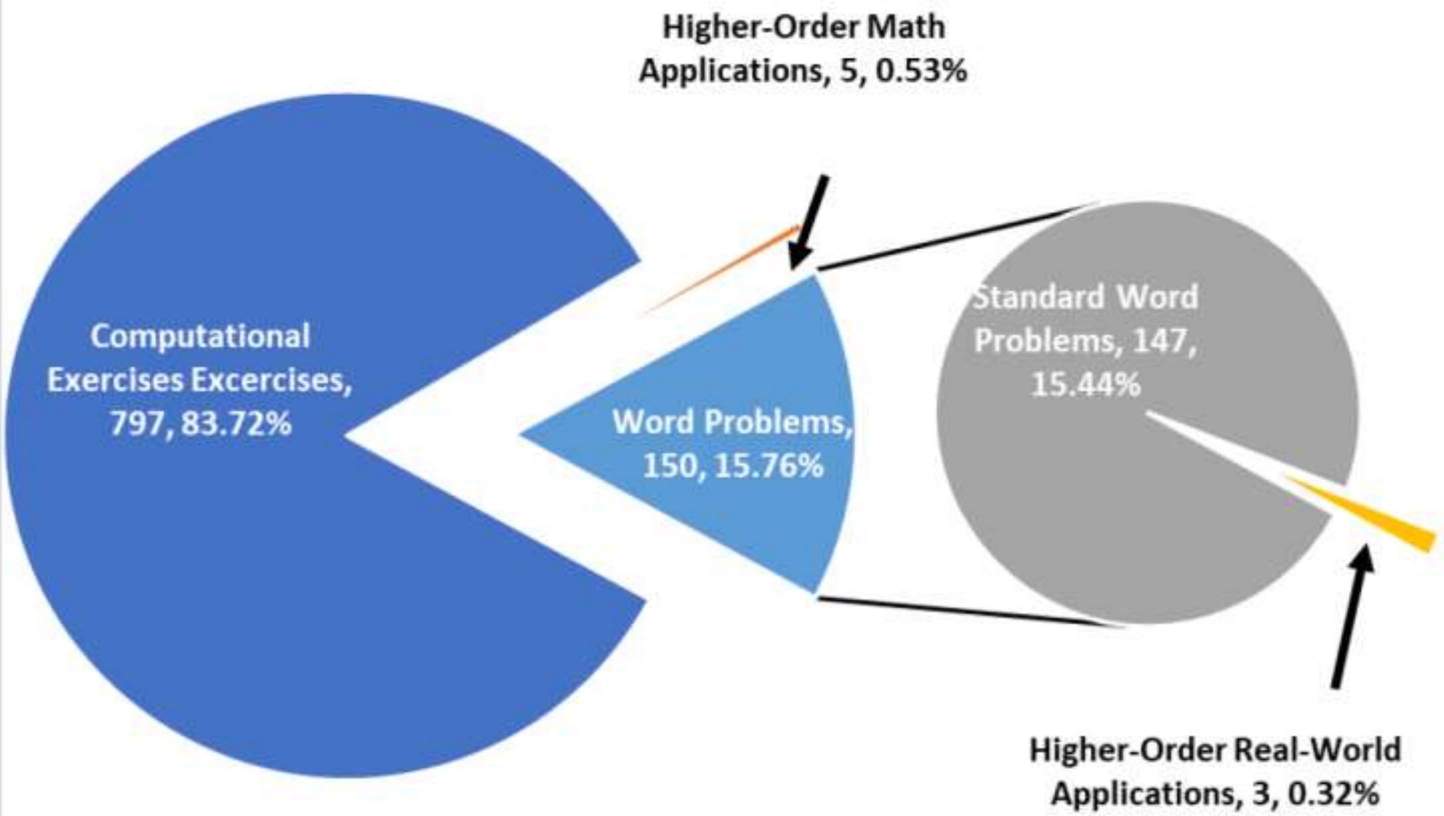
EBPO studija (2022 kovo 4)

https://dx.doi.org/10.1787/07d0eb7d-en

EBPO studija

- Studijoje apibendrinti rezultatai gauti tiriant keletą svarbių matematikos mokymo turinio ir politikos aspektų devyniolikoje šalių. Tarp jų yra Lietuva (57-60 pusl.), Latvija ir Estija.
- Pirma, kas daro kokius sprendimus švietimo sistemoje? Pavyzdžiui, kuris švietimo sistemos lygmuo nustato matematikos mokymo tikslus baigiant mokyklą? Nagrinėjami lygmenys: nacionalinis, regioninis, mokyklos, mokytojai kartu, mokytojai individualiai.
- Antra, kokia yra aštuntos klasės vadovėlio užduočių sudėtis ir jų pobūdis? Aukštesnės eilės mąstymo gebėjimų reikalaujančių užduočių pavyzdžiai realaus pasaulio ir matematikos kontekstuose pateikti 9-11 puslapiuose.
- Trečia, koks yra matematikos programos temų pasiskirstymas skirtingose klasėse?

Užduočių sudėtis 8 klasės vadovėlyje (Lietuva)



	A.E. matematika		A.E. realaus pasaulio	
EBPO				
Australija	2	0,05%	7	0,18%
Estija	151	5,55%	6	0,22%
Graikija	16	1,6%	3	o,3%
Vengrija	46	1,68%	8	0,29%
Izraelis	170	4,98%	14	0,41%
Japonija	14	1,77%	1	0,13%
Korėja	7	0,57%	3	0,25%
Latvija	45	4,12%	9	0.82%
Lietuva	5	0,53%	3	0,32%
Olandija	40	1,32%	10	0,33%
Naujoji Zelandija	17	0,08%	9	0,13%
Norvegija	1	0,05% [13 1,3%]	0	0,00% [106 10,59%]
Portugalija	5	0,2%	1	0,04%
Švedija	13	1,46%	9	1,01%
JAV	31	2,61%	7	0,6%
Argentina	11	1,03%	2	0,19%
Taivanas	34	2,1%	14	0,87%
Honkongas	201	4,84%	2	0,05%
Kazachstanas	80	3,66%	5	0,23%

AE mąstymo taikymai realiame pasaulyje

- Aukštesnės eilės mąstymo gebėjimų *realaus pasaulio kontekste* reikalaujančia užduotimi laikoma ta, kuriai atlikti reikia daugiau nei identifikuoti sprendimui tinkamą situacijos matematinę reprezentaciją.
- Užduotis turėtų vaizduoti netvarkingą, sudėtingą realų pasaulį reikalaujantį iš mokinio gebėjimo konceptualizuoti, organizuoti ir rasti tinkamą informaciją dar iki formuluojant situacijos matematinę reprezentaciją ir tik po to ieškomas atsakymas.
- Pastarasis žingsnis dažnai būna mažiausiai sudėtingas ir mažiausiai svarbus.

Užduoties pavyzdys

- Norėdama paminėti jubiliejų, Glenda pakvietė 9 savo draugus pietums.
- Buvo pateikta visų patiekalų bendra sąskaita už 800 Eurų.
- Visi dešimt svečių buvo užsakę skirtingus pagrindinius patiekalus ir skirtingus gėrimus.
- Keturi svečiai užsakė desertą ir du kiti svečiai užsakė užkandį.
- Pasiūlyti alternatyvius būdus padalinti sąskaitą tarp svečių ir paaiškinti savo samprotavimą bei naudotas prielaidas.

AE mąstymo taikymai matematikos pasaulyje

- Aukštesnės eilės mąstymo gebėjimų *matematikos kontekste* reikalaujančia užduotimi laikoma ta, kuriai atlikti reikia konceptualizuoti, organizuoti, rasti reikalingą informaciją ir, prieš sprendžiant užduotį, numatyti logiškai taisyklingą samprotavimą.
- Pavyzdžiui, geometrinio teiginio įrodymas, kuriuo siekiama formaliai konstruoti *dedukciją* randant reikalingą informaciją ir sudėliojant logiškai taisyklingą samprotavimą.
- Tokios užduoties pagrindinis aspektas yra reikalingos teoremos ir aksiomos atpažinimas ir jų jungimas į logiškai taisyklingą išvedimų grandinę.

Kas yra ,,logiškai taisyklingas samprotavimas“?

- Naujoje matematikos programoje yra 110 žodžių ,,logi....“
- Visuomenė tiki, kad matematika lavina loginį mąstymą.
- Ar matematikos vadovėliai kaip nors paaiškina šią ar panašią frazę?

- Paprasčiausios loginio išvedimo taisyklės yra
- Modus Ponens: $U,\ U \Rightarrow V \vdash V$
- Modus Tollens: $\urcorner V,\ U \Rightarrow V \vdash \urcorner U$

Kokio amžiaus vaikai gali suprasti šias taisykles?

Ką sako psichologai?

- G.J. Stylianides ir A.J. Stylianides. Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 2008.

- Tikslingai lavinami pradinių klasių vaikai supranta dedukcinio samprotavimo išvedimo taisykles, tokias kaip MP ir MT.

- Citata „Even though the findings of existing psychological research do not specify exact ages at which students master different forms of deductive reasoning, all forms of deductive reasoning we reviewed begin to emerge in the early elementary grades.“

Užduoties pavyzdys

3.3 teorema. *Tegul ABC yra trikampis ir BD pusiaukraštinė. Teiginiai*

(a) : $AB \cong BC$

(c) : $\triangle ABD \cong \triangle CBD$

yra ekvivalentūs.

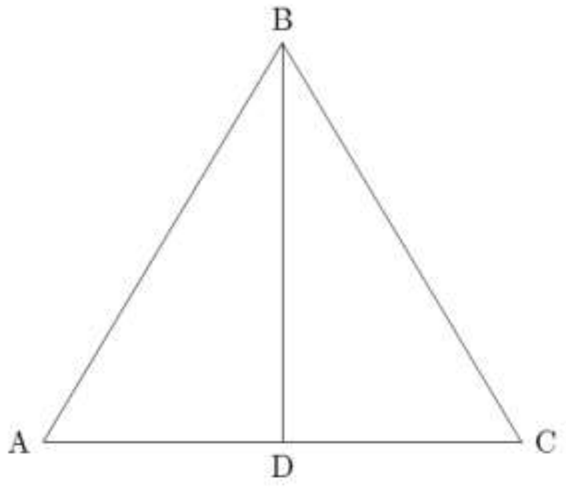


Figure 5: Trikampis

Įmplikaciją $(a) \Rightarrow (c)$ įrodanti dedukcija:

$$P_1, P_2, P_3, P_4 \vdash \text{teisinga } (c), \tag{1}$$

su prielaidomis

P_1 Trikampių kongruentumo požymis: jei trys atitinkamos kraštinės kongruenčios, tai trikampiai kongruentūs.

P_2 $AB \cong BC$ [(a) teiginys].

P_3 $BD \cong BD$.

P_4 $AD \cong DC$ [BD pusiaukraštinė].

Parodysime, kad ($\boxed{1}$) dedukcija yra taisyklinga.

Q_1 Remiantis P_2, P_3, P_4, P_1 t.y.

$$\underbrace{P_2,\ P_3,\ P_4}_{=U} \text{ jei } \underbrace{P_2 \wedge P_3 \wedge P_4}_{=U}, \text{ tai } \underbrace{(c)}_{=V}$$

ir Modus Ponens išvedimo taisykle $(U, U \Rightarrow V \vdash V)$, gauname ($\boxed{1}$) dedukcijos išvadą.

Kodėl procedūra veikia taip, kaip veikia?

$$\begin{aligned}
6381 + 1543 &= (6000 + 300 + 80 + 1) + (1000 + 500 + 40 + 3) \\
&\quad \text{dėmenis užrašome išplėstine forma} \\
&= (6000 + 1000) + (300 + 500) + (80 + 40) + (1 + 3) \\
&\quad \text{grupuojama naudojant sumos perstatymo taisyklę} \\
&= 7000 + 800 + 120 + 4 \\
&\quad \text{sudedami tos pačios eilės pozicinės reikšmės skaitmenys} \\
&= 7000 + 800 + (100 + 20) + 4 \\
&\quad \text{120 užrašomas išplėstine forma} \\
&= 7000 + (800 + 100) + 20 + 4 \\
&\quad \text{grupuojama pagal tą pačią eilę turinčius skaitmenis} \\
&= 7000 + 900 + 20 + 4 \\
&\quad \text{sudedami tos pačios eilės pozicinės reikšmės skaitmenys} \\
&= 7924. \\
&\quad \text{skaitmenų pozicinių reikšmių suma išreiškiama dešimtainiu} \\
&\quad \text{ skaičiaus simboliu}
\end{aligned}$$

Nesunku pastebėti, kad šie pertvarkymai pagrindžia sumavimo stulpeliu algoritmą.

$$\begin{array}{rcccc}
 & 6 & 3 & 8 & 1 \\
 & 1 & 5 & 4 & 3 \\
+ & & {\scriptstyle 1} & & \\
\hline
 & 7 & 9 & 2 & 4
\end{array}$$

Kodėl procedūra veikia taip, kaip veikia?

Apibrėžtis. Dviejų racionaliųjų skaičių $\frac{m}{n}$ ir $\frac{k}{l}$ suma, žymima $\frac{m}{n}+\frac{k}{l}$, yra skaičių tiesės taškas sutampantis su atkarpos $[0,\frac{m}{n}]$ ir iš nulio į tašką $\frac{m}{n}$ pastūmtos atkarpos $[0,\frac{k}{l}]$ jungties dešiniuoju galu.

Apibrėžties iliustracija: suma $\frac{m}{n}+\frac{k}{l}$ yra dviejų atkarpų jungties dešinysis galas

[——————][——————————————]———

0 $\frac{m}{n}$ $\frac{m}{n}+\frac{k}{l}$

Toliau parodome, kad racionaliųjų skaičių suma yra racionalusis skaičius ir randame jo išraišką trupmena. Dabartiniuose mūsų vadovėliuose šis faktas pateikiamas kaip taisyklė, be motyvacijos.

4 teorema. Skaičių tiesės taškas $\frac{m}{n}+\frac{k}{l}$ yra racionalusis skaičius išreiškiamas trupmena $\frac{ml+nk}{nl}$.

Įrodymas. Trupmenos $\frac{m}{n}$ ir $\frac{k}{l}$ yra ekvivalenčios trupmenoms, atitinkamai, $\frac{lm}{ln}$ ir $\frac{nk}{nl}$. Racionalusis skaičius $\frac{lm}{ln}$ yra taško $\frac{1}{ln}$ (lm)-tasis kartotinis taškas, o racionalusis skaičius $\frac{nk}{nl}$ yra taško $\frac{1}{nl}$ (nk)-tasis kartotinis taškas. Pagal sumos apibrėžimą, pakanka rasti atkarpų $[0,\frac{lm}{ln}]$ ir $[\frac{lm}{ln},\frac{lm}{ln}+\frac{nk}{nl}]$ jungties dešinįjį galą. Abi atkarpos yra padalintos vienodo ilgio atkarpomis, kurios kongruenčios atkarpai $[0,\frac{1}{ln}]$. Suskaičiavę kartotinius taškus gauname, kad ieškomas dešinysis galas yra taško $\frac{1}{ln}$ ($ml+nk$)-kartotinis taškas. Todėl

$$\frac{m}{n}+\frac{k}{l}=\frac{lm}{ln}+\frac{nk}{nl}=\frac{ml+nk}{nl},$$

ką ir reikėjo įrodyti. ■

Mokyklinis įrodymas

- Kam jo reikia?
- Atpažinti mąstymo klaidas.
- Paaiškinti teiginį.
- Motyvuoti gilinimąsi į nuobodžius dalykus (pvz. trigonometrija)
- Atskleisti matematinio mąstymo specifiką (kritinis mąstymas).

- Stereotipas: matematinis įrodymas yra tik teiginio teisingumo pagrindimas, turintis griežtą loginę struktūrą.

Mokyklinis įrodymas

- Įrodymu vadinamas matematinis argumentas, kurį sudaro matematinį teiginį patvirtinančių arba paneigiančių susijusių teiginių seka, turinti šias tris savybes:

- Naudoja teiginius, kurie klasės bendruomenei žinomi kaip teisingi ir nereikalauja papildomo pagrindimo;
- Taiko tokias samprotavimo formas, kurios galioja ir klases bendruomenei yra žinomos arba nesunkiai išvedamos;
- Formuluojama tomis reiškimo formomis, kurios yra tinkamos ir klasės bendruomenei yra žinomos arba nesunkiai gaunamos.

Mokyklinio įrodymo pavyzdys

Skaičius yra nelyginis, jei, grupuojant po du visus nedidesnius už jį, vienas lieka laisvas.

Pavyzdžiui, skaičius 13 nelyginis, nes

1	3	....	11	13
2	4	....	12	

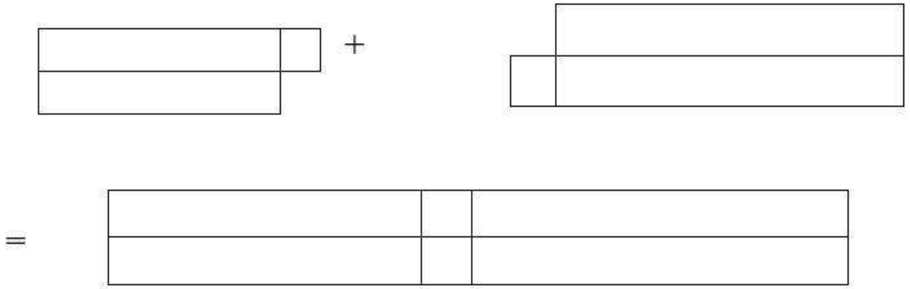
Skaičius yra lyginis, jei, grupuojant po du visus nedidesnius už jį, laisvų nelieka.

Pavyzdžiui, skaičius 16 lyginis, nes

1	3	....	13	15
2	4	....	14	16

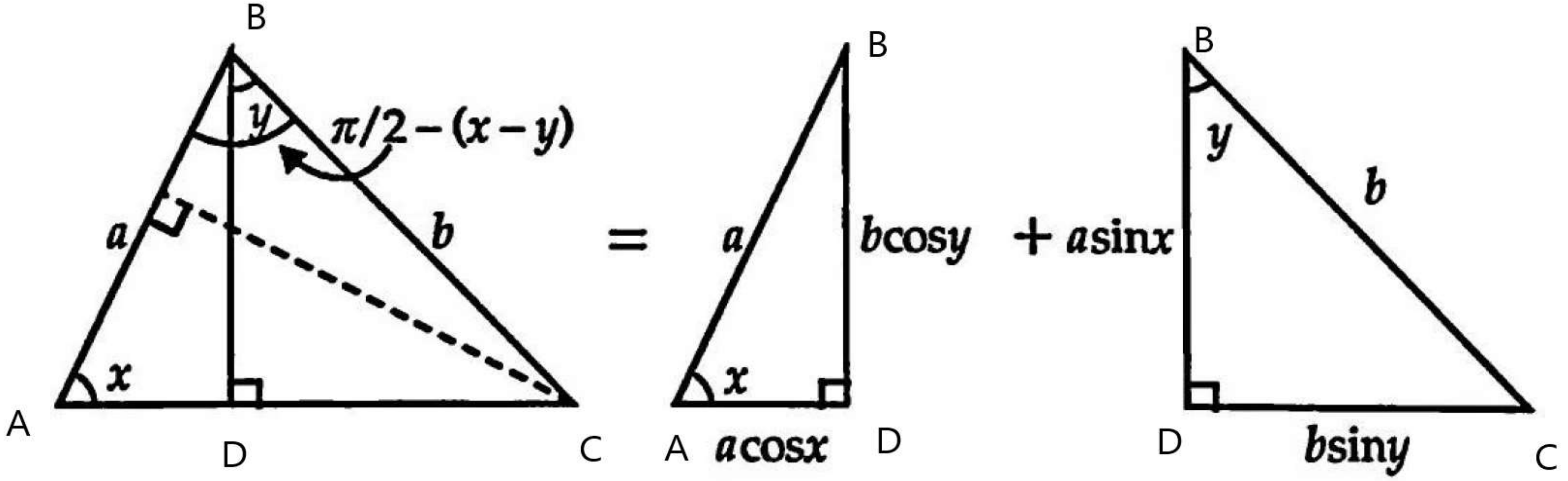
Teiginys. Dviejų nelyginių skaičių suma yra lyginis skaičius.

Įrodymas.



Trigonometrinių tapatybių įrodinėjimas

- $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$



Tekstinių uždavinių sprendimas su dedukcija

3.8 užduotis. *[2, 44 pusl.]* Atstumą nuo upės iki turistinės bazės turistai, eidami pastoviu greičiu, ketino nueiti per 6 h. Tačiau po 2 h jie sumažino greitį 0,5 km/h ir pavėlavo į turistinę bazę 30 min.

1 Kokiu greičiu turistai ėjo iš pradžių?

2 Atsakyti į pastarąjį klausimą su pagrindimu, t.y. išvedant (išaiškinant) užduoties situacijos simbolinę reprezentaciją (lygtį).

3 Įrodyti simbolinę reprezentaciją sukonstruojant taisyklingą dedukciją.

Įrodymas.

Pagrindimui naudojame dedukcinį argumentą:

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \quad \vdash \quad (8) \text{ lygtis,} \tag{9}$$

su toliau išvardintomis prielaidomis.

P_1 Jei $|AB| = S_1$, $|BC| = S_2$ ir $|AC| = S$, tai $S = S_1 + S_2$.

P_2 Jei pastoviu greičiu V judama T laikotarpiu, tai nueitas atstumas $S = V{\cdot}T$.

P_3 Faktas: AB atstumas einamas pastoviu greičiu x km/h per laiką 2 h.

P_4 Faktas: BC atstumas einamas pastoviu greičiu $x - 0,5$ km/h per laiką $4,5$ h.

P_5 Faktas: AC atstumas einamas pastoviu greičiu x km/h per laiką 6 h.

Parodysime, kad (9) argumentas yra taisyklingas, t.y. išvada yra teisinga tais atvejais, kai teisingos visos prielaidos.

Q_1 Remiantis P_3, P_2, t.y.

$$\underbrace{V = x,\ T = 2}_{=U},\ \text{jei}\ \underbrace{V = x \text{ ir } T = 2}_{=U},\ \text{tai}\ \underbrace{S = S_1 = 2{\cdot}x}_{=W}$$

ir Modus Ponens taisykle $(U, U \Rightarrow W \vdash V)$ gauname $S_1 = 2x$ km.

Q_2 Remiantis P_4, P_2 ir Modus Ponens taisykle $S_2 = 4,5(x - 0,5)$ km.

Q_3 Remiantis P_5, P_2 ir Modus Ponens taisykle AC ilgis yra $6x$ km.

Q_4 Remiantis Q_1, Q_2, Q_3, P_1 ir Modus Ponens taisykle, teisinga (8) lygtis.

Apie apibrėžimų reikšmę įrodinėjant

- Dingstimi sekančioms pastaboms yra dvi įrodymo reikalaujančios užduotys ir jų atlikimo vertinimo instrukcijos šių metų pagrindinio ugdymo pasiekimų patikrinime (PUPP).

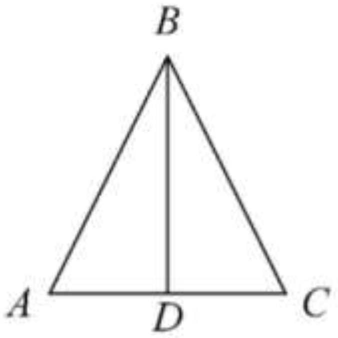
- Problema – įrodyme nurodytos savybės statusas matematikos žinių sistemoje. Ar ta savybė yra apibrėžties dalimi, ar yra įrodoma?

PUPP užduotis ir jos sprendimas

36.

Įrodykite, kad lygiašonio trikampio ABC ($AB = BC$) pusiaukraštinė BD yra trikampio ABC aukštinė. *(3 taškai)*

Jei, užrašydami įrodymą, norite rašyti kitoje eilutėje, paspauskite klavišą „Enter“.



Įrodymas:

	Taškai	Komentarai
$AB = BC$, $AD = DC$, $\angle BAD = \angle BCD$, nes trikampis ABC yra lygiašonis. *arba* $AB = BC$, $AD = DC$, BD – bendra.	1	Už įrodymo būdo pasirinkimą.
$\Delta ABD = \Delta CBD$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. *arba* $\Delta ABD = \Delta CBD$ pagal tris kraštines.	1	Už trikampių lygumo pagrindimą.
Todėl $\angle BDA = \angle BDC = \frac{180°}{2} = 90°$.	1	Už teisingą išvadą.

Kaip galėtų būti?

- Įrodyti arba pagrįsti reiškia nurodyti priežastį, kodėl teisinga kampų prie pagrindo lygybė.
- Tikslus atsakymas priklauso nuo lygiašonio trikampio apibrėžimo.
- Siūlomi įrodymų pagrindimai figūrų savybes traktuoja kaip tų figūrų apibrėžtis.
- Taip kuriamas požiūris, kad figūros apibrėžtis nesvarbi ir neaiški.
- Kai kuriuose vadovėliuose aptariama kampų prie pagrindo lygybė siūloma tikrinti matuojant (sic).

Siūlymas mokytojų knygai

3.1 teorema. *Sekantys teiginiai apie trikampį ABC yra ekvivalentūs:*

(a) $AB \cong BC$;

(b) $\angle BAC \cong \angle ACB$;

(c) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$, *čia* BD *yra pusiaukraštinė;*

(d) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$, *čia* BD *yra pusiaukampinė;*

(e) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$, *čia* BD *yra aukštinė.*

Jei bent vienas iš ekvivalenčių teiginių teisingas, tai iš viršūnės B *nubrėžtos pusiaukraštinė, pusiaukampinė ir aukštinė sutampa.*

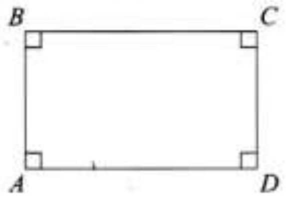
Vadovėlio teksto pavyzdys

3 Stačiakampis, rombas, kvadratas

Panagrinėkime lygiagretainius, kurių arba kampai, arba kraštinės, arba ir kampai, ir kraštinės yra lygūs. Tokie lygiagretainiai turi specialius pavadinimus.

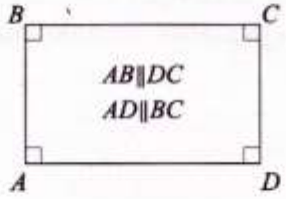
1. Keturkampį, kurio visi kampai statūs, vadiname *stačiãkampiu*.

? Kodėl stačiakampio priešingosios kraštinės yra lygiagrečios ($AB \parallel DC$ ir $AD \parallel BC$)?



Taigi stačiakampį galima apibrėžti ir kaip lygiagretainį.

Stačiakampis yra lygiagretainis, kurio visi kampai statūs.



Vadinasi, stačiakampis pasižymi visomis lygiagretainio savybėmis.

Kitos problemos

- Pirma, egzistuoja daugiau negu du vertinimo instrukcijoje nurodyti įrodymo būdai. Nestandartiškai, bet teisingai mąstantis mokinys gali būti už tai baudžiamas.
- Antra, toks schematizuotas teiginio įrodymo formatas negali atskleisti matematikos žinių hierarchinės struktūros ir mokinio supratimo.

- Kuo čia dėti vadovėliai? Jie galėtų ir turėtų formuoti taisyklingą loginio samprotavimo įrodyme praktiką.

Mokykliniai apibrėžimai

- Problema yra noras suderinti matematikos hierarchinę struktūrą su mokinio kognityviniais gebėjimais suvokti abstrakcijas.
- Pavyzdys, natūralieji skaičiai ir jų aritmetika pirmoje klasėje.
- Pirmas etapas – nuoseklus skaičiavimas, mokymasis mintinai.
- Apibrėžtis. Skaičius yra paskutinis žodis ištartas nuosekliai skaičiuojant duotame rinkinyje esančius daiktus.

- Vadovėliuose matau ,,skaičius“ ir ,,skaitmuo“ neaiškinant skirtumo.
- Yra išimčių: ,,Skaičius - tai ženklas, naudojamas žymėti kiekį. Jis užrašomas skaitmenimis.“

Natūraliųjų skaičių suma

- Apibrėšime natūraliųjų skaičių 4 ir 5 sudėtį.
- 4 plius 5 reiškia tokį skaičių, kuris gaunamas ,,skaičiuojant 5 žingsnius pradedant 4“ :
    - $4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9$
- Paskutinis gaunamas skaičius, šiuo atveju 9, yra suma 4 + 5.

- Pastaba. Svarbu matematinio objekto apibrėžimą naudoti nuosekliai visose kitose situacijose, pavyzdžiui, apibrėžiant aritmetinius veiksmus

Natūraliųjų skaičių suma

- Apibrėšime natūraliųjų skaičių 4 ir 5 sudėtį.
- 4 plius 5 reiškia tokį skaičių, kuris gaunamas ,,skaičiuojant 5 žingsnius pradedant 4“ :
    - $4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9$
- Paskutinis gaunamas skaičius, šiuo atveju 9, yra suma 4 + 5.
- Apibrėžtis. Tegul m ir n yra natūralieji skaičiai. m plius n reiškia tokį skaičių, žymimą m + n, kuris gaunamas skaičiuojant n žingsnių pradedant m.

Tvarka nuosekliai skaičiuojant

- Apibrėžtis. Tegul m ir n yra natūralieji skaičiai. Sakysime, kad n yra didesnis už m arba m yra mažesnis už n, jei nuosekliai skaičiuojant m pasirodo pirmiau už n.

- Vadovėliuose šias sąvokas galima būtų formuluoti pavyzdžiais.

- Vėlesnėse klasėse, skaičius yra taškas skaičių tiesėje. Svarbiausia tokią sampratą naudoti nuosekliai pristatant aritmetiką.

Kitos problemos vadovėlių turinyje

- ,,Dydžio“ samprata
- ,,Kintamojo“ samprata
- ,,Reiškinio“ samprata

- Šios ir kitos problemos diskutuojamos ,,matematikos mokymo seminare“ VU, MIF, ketvirtadieniais 16 val.

Pabaigai apie temų struktūrą vadovėliuose

Ačiū už dėmesį

Dešimtainės trupmenos ir jų aritmetika

- Šia tema iliustruosime skirtumą tarp orientacijos į matematinį raštingumą ir orientacijos į matematinį samprotavimą.

- Vadovėliuose veiksmų su dešimtainėmis trupmenomis taisyklės formuluojamos be paaiškinimo.
- Keletas pavyzdžių iš vieno 5 klasės vadovėlio.

Dešimtainės trupmenos ir jų aritmetika

- *Dešimtainės trupmenos stulpeliu* ***sudedamos*** *taip:*
- *1. Vienvardžių skyrių skaitmenys rašomi vienas po kito, o kablelis – po kableliu.*
- *2. Sudedami kaip natūralieji skaičiai.*
- *3. Kablelis rašomas po kableliu.*
- *Dešimtainė trupmena iš dešimtainės trupmenos* ***dauginama*** *taip:*
- *1. Dauginama kaip natūralieji skaičiai, nekreipiant dėmesio į kablelius.*
- *2. Sandaugoje kableliu iš dešinės atskiriama tiek dešimtainių ženklų, kiek jų yra abiejose trupmenose.*

Dešimtainės trupmenos ir jų aritmetika

- Šių taisyklių aiškinimo ar pagrindimo vadovėlyje nėra.
- Yra daug šių taisyklių taikymo pavyzdžių.
- Kur problema?
- Tarkime turime trupmenas 0.4 ir 0.7.
- Pagal šias taisykles jų suma yra 1.1, o sandauga yra 0.28.
- Pirmuoju atveju turime vieną skaitmenį po kablelio,
- o antruoju – du skaitmenis.
- Paaiškinimo, kodėl toks skirtumas, vadovėlyje nėra.

Dešimtainės trupmenos ir jų aritmetika

- Jei dešimtainių trupmenų aritmetika mokoma kaip paprastųjų trupmenų aritmetikos atskiras atvejis, tai galėtume aiškinti taip

  - $0.4 + 0.7 = \frac{4}{10} + \frac{7}{10} = \frac{11}{10} = 1.1$

  - $0.4 \times 0.7 = \frac{4}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{28}{100} = 0.28$.

Dešimtainės trupmenos ir jų aritmetika

- Vienas įdomus argumentas, kodėl paprastųjų trupmenų aritmetika geriau po dešimtainių trupmenų aritmetikos yra nuoroda į realųjį pasaulį.
- Teigiama, kad dešimtainių trupmenų pavyzdžių su realaus pasaulio kontekstu yra daugiau, negu paprastųjų trupmenų.
- Šio argumento esmė yra ta, kad iliustravimas realiuoju pasauliu laikomas geriau padedančiu suprasti mokyklinę matematiką, negu matematinis pagrindimas.
- Kitas argumentas - mokymo tradicija. Sunku keisti tai, kas įprasta.