



**Vilnius
University**

Statistinio raštingumo ugdymas mokykloje

Alfredas Račkauskas (VU MIF)

Statistinis raštingumas

Matematikos dalyko tikslas – sudaryti galimybę kiekvienam mokiniui, mokantis matematikos, *ugdysis* matematinį ir *statistinį raštingumą*, kuris šiame dokumente suprantamas kaip įgytas gebėjimas matematiškai samprotauti ir taikyti įgytas kompetencijas, sprendžiant įvairias realias, aktualias ir mokiniams suprantamas problemas.

Statistinis raštingumas - pagrindinės statistikos kalbos bei pagrindinių statistikos idėjų supratimas (pvz., žinojimas, ką reiškia statistiniai terminai ir simboliai bei *mokėjimas skaityti statistinę informaciją*).

Statistinis raštingumas

Statistinis mąstymas

Statistinis argumentavimas

Statistinis mąstymas – tai mąstymo tipas, kurį statistikai naudoja aiškindamiesi ar sprenddami statistines problemas.

Statistinis argumentavimas - būdas, kaip žmonės argumentuoja statistinėmis idėjomis ir įprasmina statistinę informaciją. Tai apima argumentus, pagrįstus duomenų rinkiniais, grafiniais vaizdais ir statistinėmis suvestinėmis.

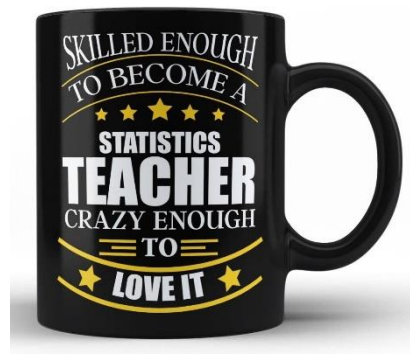
Statistinio raštingumo ugdymas

Vilnius
University

Nors statistikos specifika yra plačiai pripažinta, ji nėra savarankiška mokyklos mokymo programos tema.

Statistika mokoma kaip matematikos dalis, **nors ji tokia nėra.**

Tai kelia nemažus iššūkius matematikos mokytojams.



Statistinio raštingumo ugdymas

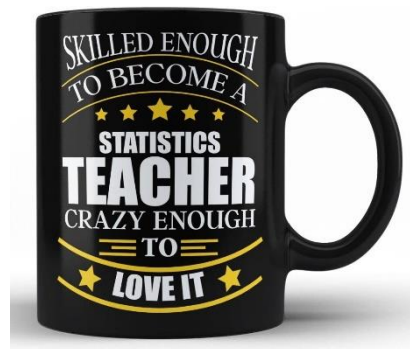
Vilnius
University

Nors statistikos specifika yra plačiai pripažinta, ji nėra savarankiška mokyklos mokymo programos tema.

Statistika mokoma kaip matematikos dalis, nors ji tokia nėra.

Tai kelia nemažus iššūkius matematikos mokytojams.

Statistika yra apie duomenis. Duomenys yra skaičiai, bet jie nėra „tik skaičiai“. Duomenys yra skaičiai su kontekstu.



Ugdymo koncepcija

Konceptuali statistinio raštingumo ugdymo struktūra turi dvi dalis:

- **Statistinis problemų sprendimo procesas.**
- **Pasiekimų lygmenys.**



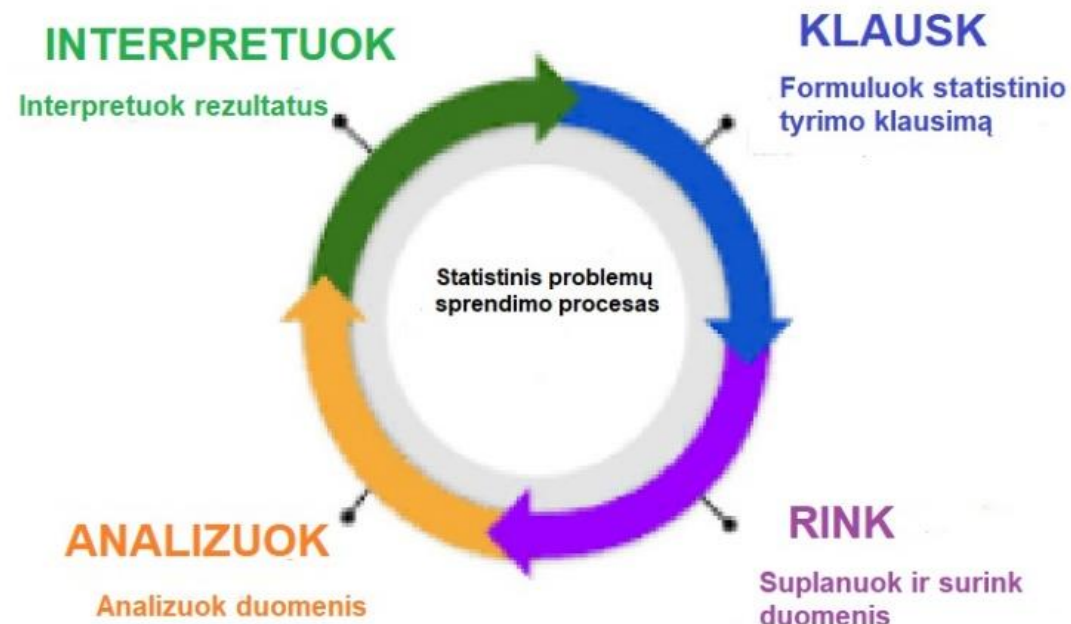
Problemomis grįstas mokymasis

Projektai grįstas mokymasis

Statistinis problemų sprendimo procesas:

- (a) ***klausimo iškėlimas/formulavimas*** (išsiaiškinama esama problema, suformuluojamas vienas (ar daugiau) klausimų, į kuriuos galima atsakyti naudojant duomenis);
- (b) ***duomenų rinkimas*** (parengiamas planas tinkamiems duomenims rinkti, pagal jį surenkami duomenys)
- (c) ***duomenų analizavimas*** (pasirenkami tinkami grafiniai ar skaitiniai metodai, kuriais pasinaudojama analizuojant duomenis);
- (d) ***rezultatų interpretavimas*** (interpretacijos siejamos su iškeltais klausimais).

KRAI: Klausk - Rink - Analizuok - Interpretuok



Statistinio raštingumo lygiai A,B,C

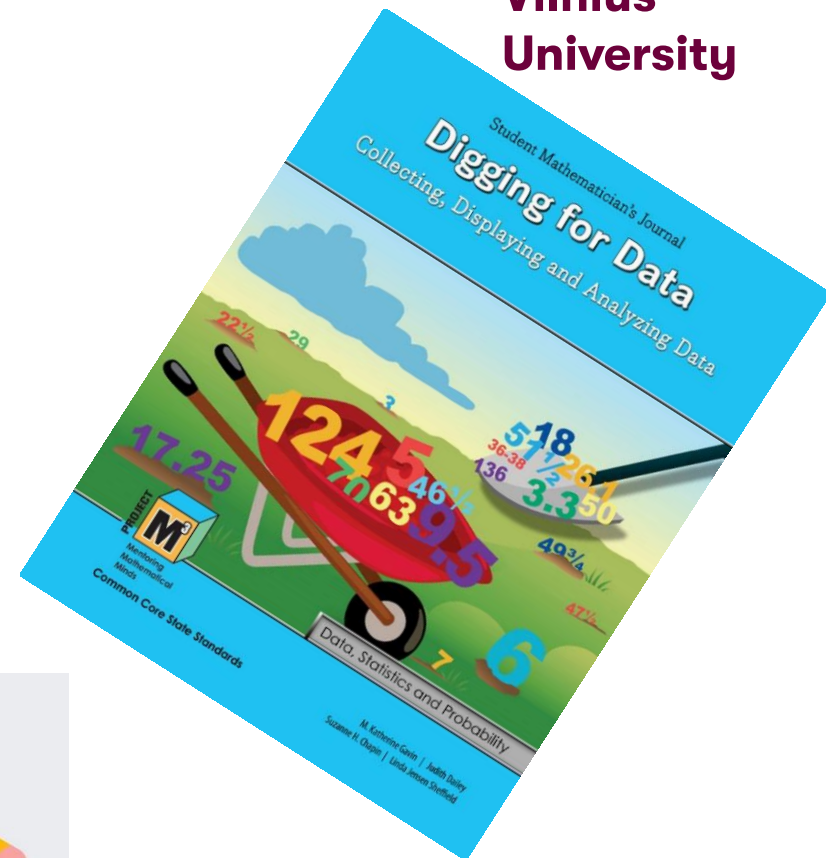
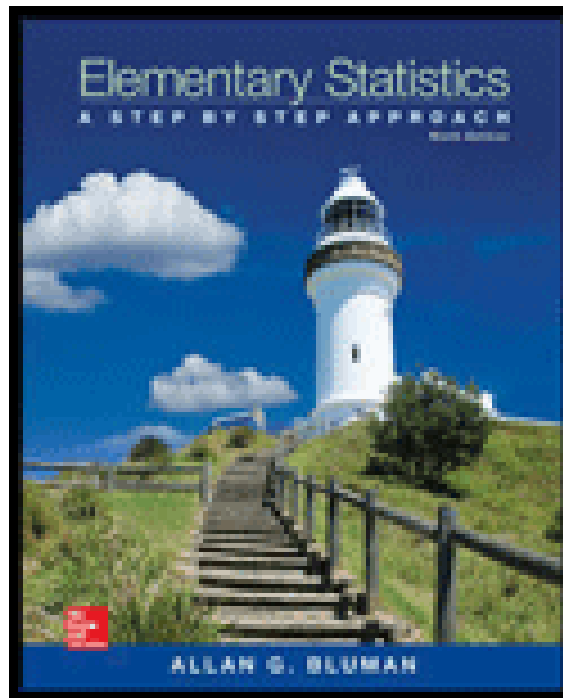
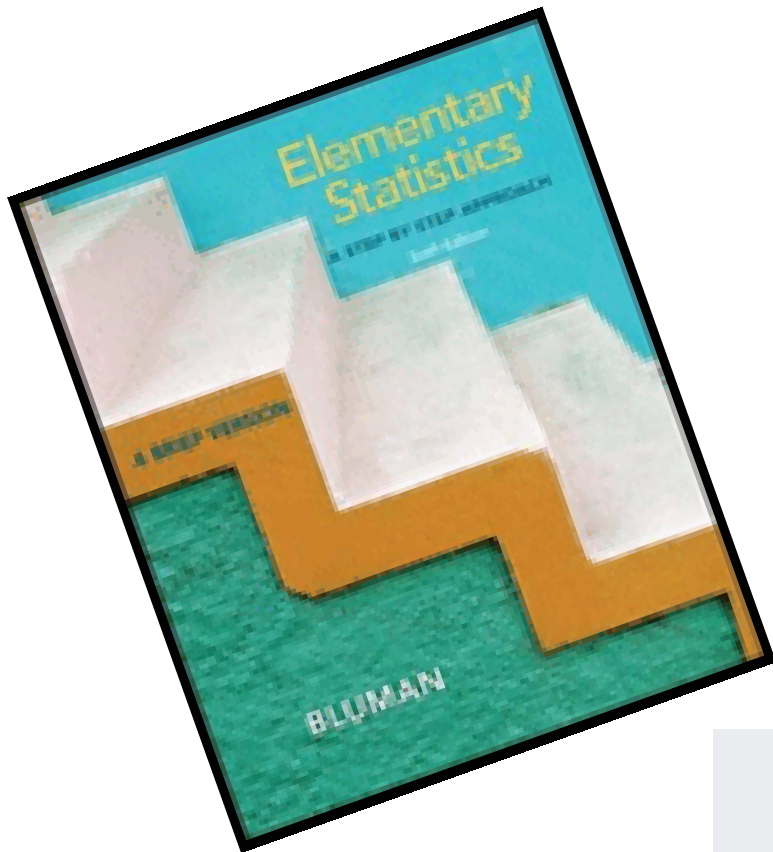
(A) lygyje mokymasis yra labiau nukreiptas į mokytoją (labai sąlyginai, tikėtina, kad pasiekiamas 1-7(8) klasėse);

(B) lygyje pereinama prie į moksleivį orientuoto darbo (labai sąlyginai, tikėtina, kad pasiekiamas 8-10 klasėse);

(C) lygyje jis tampa labai orientuotas į moksleivį (taikomas labiau išplėstiniam kursams, arba 11-12 klasėms).

! Šie trys lygiai pagrįsti statistikos mąstymo *raida*, o ne amžiumi !

Vilnius University





**Vilnius
University**

Statistika ir muzika

1-12 klasėms

A lygmuo

Muzikos populiarumas

Vilnius
University

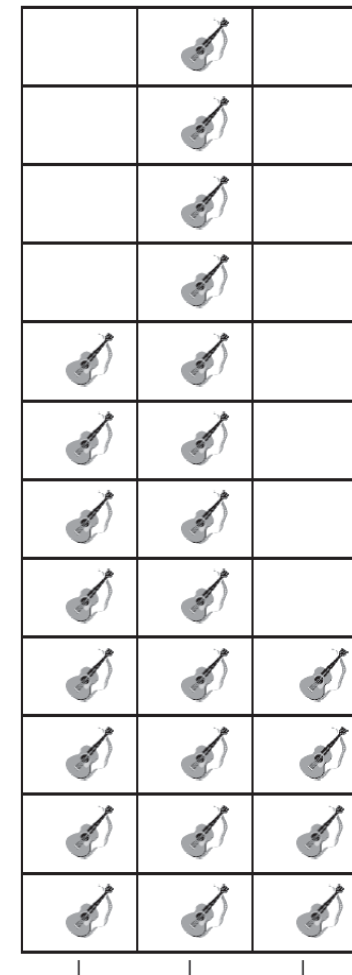
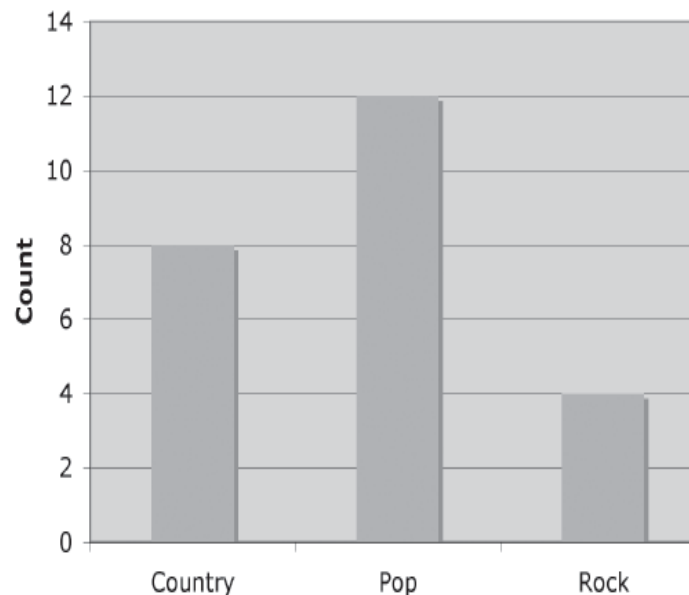
Galimas statistinis tyrimas:

Kokia muzika yra populiariausi tarp klasės mokinių?

A lygmenyje **apklausa** yra natūralus duomenų rinkimo metodas.

Galimi apklausos klausimai:

- Kokia yra tavo mėgstamiausia muzikos rūšis?
- Kokia mėgstamiausia muzikos rūšis: kantri, repas ar rokas?



B lygmuo

Muzikos pasirinkimas:

Planuodami mokyklos šokių vakarėlį, B lygio klasė gali ištirti šiuos klausimus:

Kokia muzika yra populiariausi tarp mūsų mokyklos mokinių?

Kuo skiriasi mėgstamos muzikos rūšys skirtingose klasėse?

B lygio mokiniai gali norėti palyginti savo klasės nuomones su kitų savo mokyklos klasių mokiniais. Kadangi klasių dydžiai gali būti skirtingi, norint palyginti, reikės verstis su santykiniais dažniais.

Class 1			Class 2		
Favorite	Frequency	Relative Frequency Percentage	Favorite	Frequency	Relative Frequency Percentage
Country	8	33%	Country	5	17%
Rap	12	50%	Rap	11	37%
Rock	4	17%	Rock	14	47%
Total	24	100%	Total	30	101%

Dainos trukmė ir MP3 failo dydis.

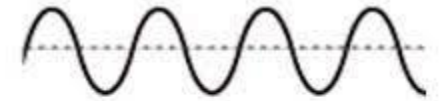
Statistinio klausimo formulavimas.

Ar manote, kad yra ryšys tarp dainos trukmės minutėmis ir MP3 failo dydžio?

Galimi ir kitokie klausimai, pavyzdžiui:

- Kiek tikėtina dainų galite įsirašyti įrenginyje turinčiame 1 GB atminties?
- Ar kantri, ar roko dainos reikalauja daugiau atminties? Ir pan.

WAV/FLAC



MP3



Galima susieti su matematikos nauda skaitmeninant muziką ir ne tik!

Duomenų rinkimas, tvarkymas ir tikrinimas.

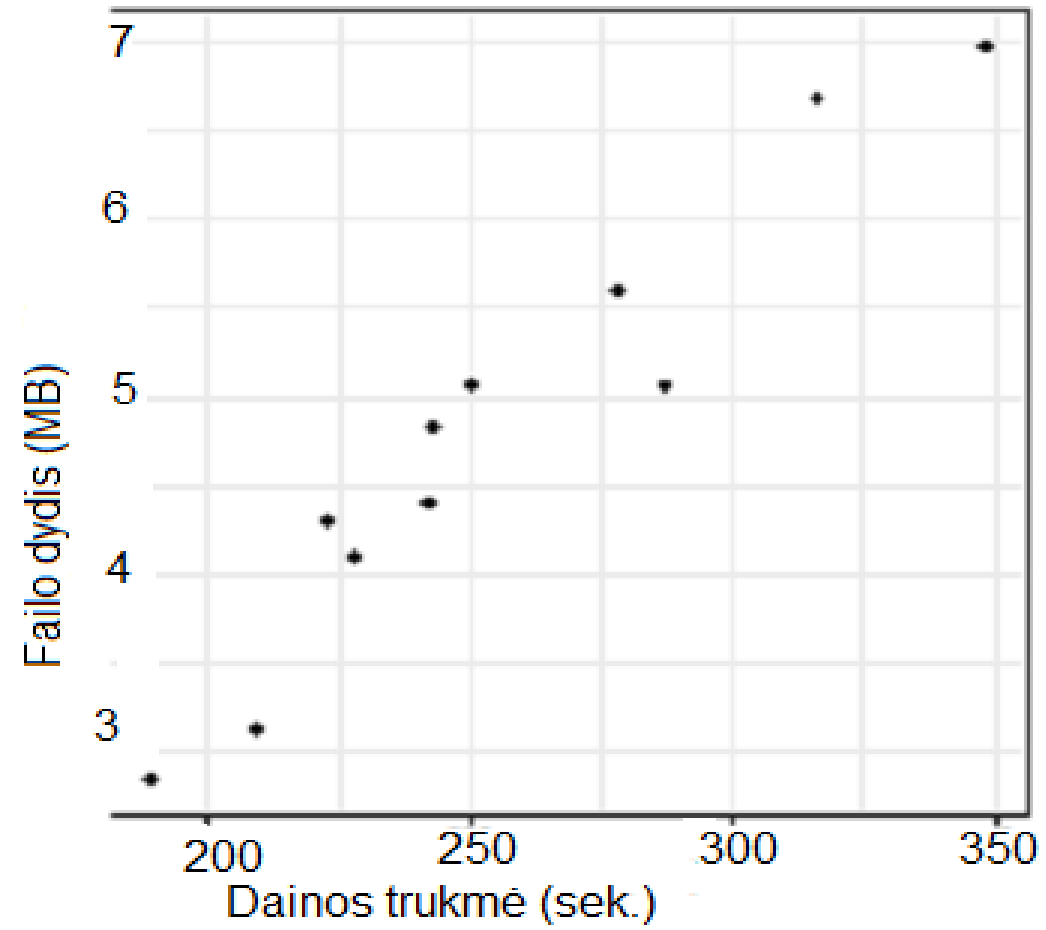
Suplanuoti, kaip surinkti duomenis.

Kiekvienas mokinys gali duomenis susirinkti iš savo mobiliojo telefono ar kompiuterio.

Jei mokytojas turi surinktų ar iš interneto ištrauktų duomenų, galima pradėti darbą su jais.

Duomenų tyrinėjimas.

Verta paaiškinti kas yra sklaidos diagrama, kam ir kaip ji naudojama.



Paaiškinkite, kad šioje sklaidos diagramoje dainos trukmė yra *nepriklausomas kintamasis* arba *aiškinantysis kintamasis*, o failo dydis – *priklausomas kintamasis* arba *atsako kintamasis*. Ko gero teks priminti ir sąvoką „statistinis kintamasis“ bei pakabėti apie jų tipus.

Paklauskite, kokias mokiniai įžiūri tendencijas šioje sklaidos diagramoje?

Galimas atsakymas: *Ilgesnė daina (sekundėmis) linkusi užimti daugiau atminties (MB).*

Kas atsitinka su failo dydžiu, kai daina ilgėja?

Galimas atsakymas: *Failo apimtis didėja.*

Paaiškinkite mokiniams, kad sąsajos tarp statistinių kintamųjų būna teigiamos ir neigiamos, jei jos apskritai yra ir patarkite kaip jas galima atpažinti.

Kaip apibūdinsite sąsają tarp dainos ilgio ir failo apimties?

Galimas atsakymas: sąsaja yra teigiama.

Paaiškinkite, kad duomenų analizavimo vienas iš tikslų yra rasti matematinį modelį, apibūdinantį ryšį tarp dviejų kiekybinių kintamųjų. Galima padiskutuoti apie tiesinius ir netiesinius modelius.

Koks matematinis modelis tiktų ryšiui tarp dainos failo apimties ir dainos trukmės apibūdinimui?

Galimas atsakymas: tiesinis modelis turi prasmę, nes sklaidos diagramoje taškai yra glaudžiai išsidėstę apie tiesią liniją.

Paaiškinkite koreliacijos koeficiento prasmę, savybes ir kaip jį suskaičiuoti.

Rezultatų interpretavimas

Grįžkite prie statistinio klausimo. Ar gavote atsakymą? Kokį atsakymą gavote? Paprašykite atliktą tyrimą pristatyti žodžiu. Patarkite, kaip tai galima padaryti.

Atlikę šią užduotį, moksleiviai sužino visas sąvokas ir instrumentus, kurie numatyti 9 klasės programoje. T.y.,

statistinis kintamasis ir jų tipai;

sklaidos diagrama;

statistinių kintamųjų sąryšiai;

tiesinė koreliacija.

Problema. *Ar muzikos klausymas trukdo mokytis?*

Vilnius
University

Įprasta, kad besimokydami mokiniai klausosi muzikos. Kai kurie mokiniai teigia, kad muzikos klausymas jiems padeda susikaupti ir nuteikia teigiamai. **Ar tikrai?** Reikia šią problemą ištirti. Tuo tikslu moksleiviai gali kurti eksperimentinį tyrimą, skirtą ištirti muzikos klausymosi poveikį žmogaus gebėjimui įsiminti žodžius.

Statistinio klausimo formulavimas.

Ar klausydami muzikos mokiniai sugeba įsiminti daugiau žodžių nei nesiklausydami?



shutterstock.com - 81372991

Duomenų surinkimas.

Klasė turi sukurti eksperimentinių duomenų rinkimo strategiją, kad būtų galima atsakyti į tiriamąjį klausimą. Reikės, kiek įmanoma, pašalinti galimus pašalinius kintamumo šaltinius, kurie gali trukdyti interpretuoti rezultatus.

Vienas paprastas eksperimentas, kurį galima atlikti su klase: atsitiktinai padalyti klasę į dvi vienodo dydžio grupes.

Taip moksleiviams ugdomas supratimas, kad atsitiktinis priskyrimas yra svarbi eksperimentinio plano dalis, nes ji linkusi mokinių gebėjimus atskirti nuo kitų savybių, kurie gali paveikti atsakymus. Kaip tai padaryti?

Pavyzdžiui, mokytojas gali sumaišyti 28 kortas, 14 raudonų ir 14 juodų kortelių ir išdalinti po vieną kiekvienam mokiniui. Gavę raudoną kortelę dalyvaus muzikos klausytojų grupėje, o gavę juodą – tylos grupėje.

Klasė turėtų sukurti eksperimentinę procedūrą ir susitarti dėl jos detalių. Pavyzdžiui, kiekvienas dalyvis gali turėti dvi minutes 20 žodžių sąrašui išnagrinėti, po to daryti vienos minutės pauzę, o tada – per dvi minutes užrašyti kuo daugiau žodžių iš duoto sąrašo.

Viso eksperimento metu vienos grupės dalyviai klausysis tos pačios dainos, o kontrolinė grupė visą laiką tylės.

Teisingai įsimenamų žodžių skaičius yra dominantis statistinis kintamasis.

Duomenų analizavimas.

Mokiniai turėtų apskaičiuoti suvestinę statistiką muzikos klausymo grupei ir tylos grupei. Stačiakampės diagramos suteiks daug informacijos tiriamam klausimui atsakyti.

Jeigu duomenų yra daug, moksleiviai gali naudoti technologijas, svarbu žinoti, kaip jas naudoti.

Rezultatų interpretavimas. Koks yra atsakymas į iškeltą klausimą?

Mokiniam gali kilti klausimas, ar muzikos tipas buvo svarbus veiksnys rezultatui. Pavyzdžiui, ar žodžių buvimas dainoje prisideda prie skirtumų tarp dviejų grupių?

Galima kartoti eksperimentą su nauja moksleivių grupe, naudojant tik instrumentinę muziką.

Moksleiviai turėtų suprasti šio eksperimento išvadų apimtį. Atranka nebuvo atsitiktinė, jie buvo atsitiktinai priskirti tyrimo grupėms. Tai riboja išvadų apimtį klasei, tačiau ne bendrajai populiacijai. Eksperimentas gali būti plėtojamas kitoje klasėje.



**Vilnius
University**

Duomenys ir interpretavimas

**9 ir I gimnazijos klasės,
10 ir II gimnazijos klasės
IV gimnazijos klasė. Bendrasis kursas**

9 ir I gimnazijos klasė

Duomenys ir interpretavimas

Nagrinėjamos taškinės (sklaidos) diagramos, vaizduojančios **statistinį ryšį** tarp dviejų **kintamųjų** (stebimų požymių) reikšmių. Mokomasi iš **sklaidos diagramos** įvertinti šio ryšio buvimą ar nebuvimą, aptariama, kokiais atvejais kalbama apie kintamųjų **koreliacinį ryšį**. Detaliau aptariama **tiesinė koreliacija**. Mokomasi užrašyti **sklaidos diagramoje pavaizduotos tiesės lygtį** $y = kx + b$, koeficiento k reikšmę, interpretuoti šia lygtimi aprašomą duomenų ryšį. Aptariama, kodėl negalime daryti išvados apie **tiesinės priklausomybės** egzistavimą populiacijoje, jei duomenys imtyje yra **neatsitiktiniai** ar jų yra per mažai.

- *statistinis kintamasis ir jų tipai;*
- *sklaidos diagrama;*
- *koreliacijos koeficientas;*
- *tiesinis sąryšis*

9 ir I gimnazijos klasė

Duomenys ir interpretavimas

Nagrinėjamos taškinės (sklaidos) diagramos, vaizduojančios **statistinį ryšį** tarp dviejų **kintamųjų** (stebimų požymių) reikšmių. Mokomasi iš **sklaidos diagramos** įvertinti šio ryšio buvimą ar nebuvimą, aptariama, kokiais atvejais kalbama apie kintamųjų **koreliacinį ryšį**. Detaliau aptariama **tiesinė koreliacija**. Mokomasi užrašyti **sklaidos diagramoje pavaizduotos tiesės lygtį** $y = kx + b$, koeficiento k reikšmę, interpretuoti šia lygtimi aprašomą duomenų ryšį. Aptariama, kodėl negalime daryti išvados apie **tiesinės priklausomybės** egzistavimą populiacijoje, jei duomenys imtyje yra **neatsitiktiniai** ar jų yra per mažai.

Šiame etape galima (ir reikia) naudoti sąvokas, grafikus ir kitas duomenų santraukas, kurios buvo nagrinėjamos iki 8 klasės. **Tikėtinas žinias būtina pristatyti.**

- *statistinis kintamasis ir jų tipai;*
- *sklaidos diagrama;*
- *koreliacijos koeficientas;*
- *tiesinis sąryšis*

Šiame etape pavyzdžiai ir naujas turinys yra kuriami atliekant statistinį duomenų tyrimą, kuris apima:

- statistinio klausimo formulavimą (apima taip pat kylančių problemų nustatymą ir duomenų rinkimo planavimą);
- duomenų rinkimą, tvarkymą ir tikrinimą;
- duomenų tyrinėjimą;
- rezultatų interpretavimą kontekste.

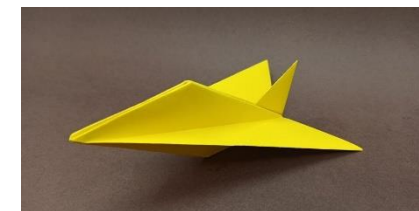
Kadangi viskas prasideda nuo statistinio klausimo, pravartu prisiminti, kad tinkamai suformuluoto statistinio klausimo kriterijai yra šie:

- Statistiniame klausime aiškiai pasakytas dominantis statistinis kintamasis (-ieji).
- Statistinis klausimas aiškiai nurodo populiaciją, kuriai jis skirtas.
- Statistinis klausimas aiškiai nurodo tikslą.
- Iš statistinio klausimo turėtų būti aišku, ar duomenys, padedantys atsakyti į klausimą gali būti renkami (vadinami pirminiais duomenimis), ar duomenys jau yra prieinami (vadinami antriniais duomenimis).
- Statistinis klausimas yra vertas tyrimo, jis įdomus ir/ar turi tikslą, padeda atsakyti į tyrimo klausimą.

Keli pavyzdžiai

Sudėtingesnis duomenų surinkimas

Ištirti sąsajas tarp skirtingų popierinių lėktuvėlių konstrukcijos ir įveikto atstumo bei skrydžio laiko.



Kiek trunka keleivių įlaipinimas?

Sąsajos tarp įlaipinimo į troleibusą ir autobusą.



Jau atliktų projektų pavyzdžiai.

Užduotys (žinių užtvirtinimui (*būtiną kontekstą*))

**Vilnius
University**

Bebrai ir vabalai.

Ekologai mūsų aplinkoje kartais randa gana keistų santykių. Vienas jų tyrimas rodo, kad bebrai naudingi vabalams. Tose vietose, kur bebrai kirto medvilnės medžius, tyrėjai parinko 23 apskritus sklypus, kurių kiekvienas buvo 4 metrų skersmens.



Kiekviename sklype jie skaičiavo bebrų nukirstų medžių kelmus ir vabalų lervų sankaupos.

Kelmai	2	2	1	3	3	4	3	1	2	5	1	3
Lervų sankaupos	10	30	12	24	36	40	43	11	27	56	18	40
Kelmai	2	1	2	2	1	1	4	1	2	1	4	
Lervų sankaupos	25	8	21	14	16	6	54	9	13	14	50	

- Padarykite sklaidos diagramą, kuri parodytų, kiek bebrų padarytų kelmų skaičius turi įtakos vabalų lervų sankaupų skaičiui. Ką rodo diagrama? (Ekologai mano, kad nauji kelmų daigai yra švelnesni ir vabalams labiau patinka.)
- Regresijos linija yra

$$\text{lervų sankaupos} = -1,286 + (11,894 \times \text{kelmai})$$

- Nubrėžkite šią liniją savo sklaidos diagramoje.

(Norėdami nubrėžti liniją, naudokite lygtį $y = -1.286 + 11.894x$, ir raskite y imdami $x = 1$ ir $x = 5$. Per surastus du (x, y) taškus nubrėžkite tiesią liniją.)

- Koreliacija tarp šių kintamųjų yra $r = 0,916$.
- Kiek procentų stebimo vabalų lervų sankaupų skaičiaus kitimo galima paaiškinti tiesinio modelio pagalba?
- Ar, remdamasis savo pastebėjimais (a), (b) ir (c) punktuose, manote, kad kelmų skaičiavimas yra patikimas būdas numatyti vabalų lervų sankaupas? Atsakymą pagrįskite.

10 ir II gimnazijos klasė

Duomenys ir interpretavimas.

Paaiškinama, kaip **imties iš populiacijos** sudarymas susijęs su pagrįstų išvadų darymu, ką vadiname duomenų rinkinių kintamumu, **duomenų pasiskirstymu**, kaip galima apibūdinti ir kiekybiškai interpretuoti duomenų rinkinius.

Aptariamos sąvokos: **dispersija**, **standartinis nuokrypis**, **skirstinys**, **normalusis skirstinys**, simetriškasis skirstinys, asimetriškasis skirstinys. Nagrinėjant realaus gyvenimo konteksto pavyzdžius, diskutuojama apie duomenų rinkimą ir analizavimą. Svarstoma, kokias išvadas apie duomenis leidžia daryti jų pasiskirstymą aproksimuojančios kreivės forma ar apskaičiuotos duomenų centro (pavyzdžiui, vidurkio) ir sklaidos (pavyzdžiui, standartinio nuokrypio, kvartilių) charakteristikos. Analizuojamas **statistinis patikimumas**.

- *Populiacija ir imtis*
- *Duomenų pasiskirstymas*
- *Duomenų pasiskirstymo parametrai*
- *Statistinis patikimumas*

10 ir II gimnazijos klasė

Duomenys ir interpretavimas.

Paaiškinama, kaip **imties iš populiacijos** sudarymas susijęs su pagrįstų išvadų darymu, ką vadiname duomenų rinkinių kintamumu, **duomenų pasiskirstymu**, kaip galima apibūdinti ir kiekybiškai interpretuoti duomenų rinkinius.

Aptariamos sąvokos: **dispersija, standartinis nuokrypis, skirstinys, normalusis skirstinys**, simetriškasis skirstinys, asimetriškasis skirstinys. Nagrinėjant realaus gyvenimo konteksto pavyzdžius, diskutuojama apie duomenų rinkimą ir analizavimą. Svarstoma, kokias išvadas apie duomenis leidžia daryti jų pasiskirstymą aproksimuojančios kreivės forma ar apskaičiuotos duomenų centro (pavyzdžiui, vidurkio) ir sklaidos (pavyzdžiui, standartinio nuokrypio, kvartilių) charakteristikos. Analizuojamas **statistinis patikimumas**.

9 ↔ 10

- *Populiacija ir imtis*
- *Duomenų pasiskirstymas*
- *Duomenų pasiskirstymo parametrai*
- *Statistinis patikimumas*

Užduotys

JAV vyriausybės nuostatai reikalauja, kad automobilių gamintojai kiekvienam automobilio modeliui nurodytų degalų sąnaudas.

Lentelėje pateikiamos 2008 metų 31 sedanų degalų sąnaudos važiuojant greitkelyje (mylios už galoną).

Išanalizuokite šių automobilių degalų sąnaudas greitkelyje.

- Sudarykite histogramą. Ką galite pasakyti apie bendrą pasiskirstymo formą?
- Kur yra pasiskirstymo centras?
- Trys iš šių automobilių buvo apmokestinti „degalų perviršio mokesčiu“, nes jų rida yra per maža. Kokie tie trys automobiliai?
- Padarykite šių duomenų medžio diagramą.
- Raskite penkių skaičių suvestinę. Kurie automobiliai patenka į apatinį degalų sąnaudų ketvirtį?
- Medžio diagrama parodo faktą apie bendrą pasiskirstymo formą, kurio negali apibūdinti penkių skaičių santrauka. Ar tai faktas?

TABLE 11.2 Highway gas mileage for model year 2008 sedans

Model	mpg	Model	mpg
Acura RL	24	Lexus ES350	27
Bentley Arnage	15	Lexus GS460	24
BMW 535i	26	Lincoln Town Car	23
Buick Lacrosse	24	Maybach 57	16
Cadillac CTS	26	Maybach 62	16
Cadillac STS	26	Mazda 6	26
Chevrolet Malibu	30	Mercedes-Benz E350	24
Chrysler Sebring	27	Mercedes-Benz E550	22
Dodge Avenger	30	Nissan Maxima	25
Honda Accord	31	Pontiac Grand Prix	28
Hyundai Sonata	31	Rolls Royce Phantom	18
Infiniti G35	25	Saturn Aura	30
Infiniti M35	23	Toyota Camry	31
Jaguar S-Type R	22	Volkswagen Passat	26
Kia Optima	31	Volvo S80 AWD	24
Kia Spectra	32		

Source: www.fueleconomy.gov.

IV gimnazijos klasė. Bendrasis kursas

Įvadas į taikomąją duomenų analizę. Nagrinėdami straipsnius apie mokslo pasiekimus, statistikos ir technologijų vaidmenį šiuolaikiniame pasaulyje, mokiniai sužino, kad funkcijos gali būti naudojamos ir duomenims apibūdinti, o jei duomenys susiję tiesiniu ryšiu, tai tas ryšys gali būti modeliuojamas tiese (regresijos tiese), o jo stiprumas ir kryptis išreikšti koreliacijos koeficientu. Visas naujas sąvokas mokiniai išsiaiškina, nagrinėdami konkrečius pavyzdžius, o reikiamai skaitinei informacijai gauti pasitelkia skaitmenines technologijas. Mokiniai išsiaiškina, kad statistinės analizės (regresinė analizė yra viena iš jos dalių) tikslas – ištyrus dalį respondentų (imtį), padaryti išvadą apie visą populiaciją. Aptariamos kintamojo, kintamojo matavimo skalių, duomenų sąvokos ir išsiaiškinama, kodėl tik **intervaliniams duomenims** taikomos vidurio, standartinio nuokrypio, koreliacijos (tiesinės koreliacijos koeficiento) skaičiavimo procedūros. Mokoma(si) praktiškai, naudojantis skaitmeninėmis technologijomis, apskaičiuoti duomenų rinkinio imties vidurkį, standartinį nuokrypį, interpretuoti, kaip jie charakterizuoja imtį. Nagrinėjami pavyzdžiai, kai sprendimui dėl kintamųjų ryšio ir jo stiprumo priimti naudojama koreliacija (pavyzdžiui, laiko ir pažymių, amžiaus ir atlyginimo, IQ ir darbo kompiuteriu). Atkreipiamas dėmesys, kad koreliacija nepaiškina priežastingumo. Paaiškinama, kad **priežastingumui tarp kintamųjų nustatyti taikomas kitas matematinis modelis – tiesinė regresija**. Nagrinėjamos paprasčiausios tipinės situacijos, kai gali būti taikoma tiesinė regresija (pavyzdžiui, ar per egzaminą surinktų balų skaičius priklauso nuo socialinio statuso). Išsiaiškinama, kaip priimamas sprendimas, kuris kintamasis vadinamas priklausomu kintamuoju, o kuris – aiškinamuoju (regresoriumi). **Naudojantis skaičiuoklės programa**, demonstruojama, kaip atrodo grafinis duomenų rinkinio vaizdas („taškų debesėlis“). Nagrinėjama problema – ar įmanoma šiuos duomenis aprašyti modeliu (tiese). Išsiaiškinama, kad svarbiausia šio modelio (tiesės) charakteristika – determinacijos koeficientas (R kvadratas) ir mokomasi, jį žinant (suradus), priimti sprendimą dėl gauto modelio tinkamumo duomenims aprašyti.

!!!!!!

Klaidinga regresija yra statistinis modelis, rodantis klaidinančius statistinius ryšius; kitaip tariant, netikra koreliacija tarp kintamųjų.

Pavyzdys.

Metinis JAV eksporto indeksas (y) (1960-1990 metų duomenimis) ir Australijos vyrų gyvenimo trukmė (x): nustatytas tiesinis modelis

$$y = -2943. + 45.7974 x,$$

koreliacijos koeficientas $r=0.9570$ ir R kvadratas = 0.916.

Problema.

Vilnius
University

Švietimo administracija ir mokytojai yra susirūpinę dėl pastebimo mokinių miego trūkumo. Mokiniai klasėje atrodo labiau nei bet kada pavargę, sunkiai gali susikaupti ar ilgesnį laiką išlaikyti dėmesį. Dėl to sulaukiama tėvų skundų, kad mokiniams užduodama per daug namų darbų.

Tačiau manoma, kad yra keletas galimų veiksnių, kurie prisideda prie miego trūkumo ir tie veiksniai nėra akademiniai. Jie apima mokinių užklasinės veiklos, kurioje jie aktyviai dalyvauja, skaičių ir jiems skiriamą laiką bei laiką praleistą internete ar prie elektroninių prietaisų.

Nusprendžiama atlikti atrinktų mokyklų mokinių apklausą vienoje ar keliose savivaldybėse ir nustatyti galimus veiksnius, lemiančius vidurinės mokyklos mokinių miego trūkumą.



Tai labai svarbi problema, reikalaujanti rimto mokslininkų dėmesio. Prie jos sprendimo gali prisidėti ir patys moksleiviai, keldami paprastus, su šia problema susijusius klausimus.

Pavyzdžiui:

Kiek būrelių lanko 9-12 klasių mokiniai?

Kiek laiko užklasinėms veikloms (per savaitę; per mėnesį) skiria 9-12 klasių mokiniai?

Kiek valandų per dieną po pamokų skiriama internetui?

Kiek laiko per dieną praleidžiama žaidžiant kompiuterinius žaidimus?

Kiek laiko skiriama (matematikos) namų darbams?



**Vilnius
University**

Tikimybės

Slidi tema!

Tikimybės ir jų interpretavimas

3 klasė

Kalbant apie kasdienes įvykius, mokomasi parinkti tinkamiausią žodį to **įvykio tikėtinumui** nusakyti (negalimas, mažai tikėtinas, labai tikėtinas, būtinas; niekada, kartais, dažnai, visada) ar įvykiams palyginti pagal tikėtinumą (labiau ir (ar) mažiau tikėtina, kad...).

4 klasė

Nagrinėjami žaidimai su keliomis vienodai ir nevienodai galimomis 2 – 6 baigtimis (pavyzdžiui, monetos ar kauliuko metimas, suktuko sukimas ir pan.). Aptarus bandymo (stochastinio bandymo) ir baigties sąvokas, mokomasi aprašyti visas galimas baigtis ir svarstoma, kuri iš baigčių labiau, mažiau ar vienodai tikėtina. Atliekant eksperimentą (pavyzdžiui, žaidimą kartojant 10, 20 kartų ir skaičiuojant baigties pasirodymo dažnį) tikrinama, ar pasitvirtino spėjimo rezultatas, aptariama, kodėl. Mokomasi formuluoti, vertinti teiginius apie baigčių tikėtinumą. **Kiekvienos baigties tikimybė užrašoma kaip trupmena.** Kuriami žaidimai, kad kiekvienas žaidžiantysis turėtų tą pačią **tikimybę (galimybę)** laimėti.

5 klasė

Nagrinėjami kasdienių atsitiktinių įvykių, paprasčiausių bandymų (stochastinių bandymų) pavyzdžiai (pavyzdžiui, metama moneta ir stebima, kuria puse ji atvirs, traukiami rutuliai, vyksta finalinės varžybos ir stebima, kuri komanda laimės ir pan.). *Dėmesys sutelkiamas į visas jų galimas baigtis, turint galvoje tiek bandymus su vienodai galimomis baigtimis, tiek su nevienodai galimomis baigtimis.* Baigtys koduojamos, sudaroma baigčių aibė, svarstoma apie baigčių tikėtinumą (kuri mažai tikėtina ar labai tikėtina). *Apibrėžiama įvykio tikimybės ($P(\text{įvykio}) = m/n$) sąvoka; vienodų baigčių atveju mokomasi ją taikyti, kai n neviršija 10.*

6 klasė.

Apibrėžiama įvykio sąvoka (galimų baigčių rinkinys). Nagrinėjami vieno dviejų etapų bandymai (stochastiniai bandymai) ir su jais susiję nesutaikomi įvykiai. Sudarant baigčių su dviem elementais rinkinius, braižomi galimybių medžiai ir sudaromos galimybių lentelės. Taip pat aptariama, kaip galima apskaičiuoti dviejų etapų bandymų baigčių skaičių, taikant daugybos taisyklę. Apibrėžiami įvykiai: elementarusis, būtinasis, negalimasis. *Mokomasi taikyti formulę $P(\text{įvykio}) = m/n$.* Aptariama, kodėl įvykio tikimybė visuomet yra skaičius iš intervalo $[0; 1]$. Mokomasi formuluoti įvykiui priešingą įvykį, pagrindžiamas įvykio ir jam priešingo įvykio tikimybių sąryšis. Kuriamos ir aptiriamos žaidimo taisyklės, numatančios tą pačią laimėjimo tikimybę kiekvienam žaidėjui. *Diskutuojama, kaip statistika gali padėti apskaičiuoti apytikrį įvykio tikėtinumą.*

10 ir II gimnazijos klasė.

Aptariama, kas yra kelių elementų rinkinys, kaip užrašoma tokių rinkinių aibė. Mokomasi sudaryti rinkinius, kai elementai imami iš tos pačios aibės ar skirtingų aibių. Nagrinėjami pavyzdžiai, kai elementų tvarka rinkinyje svarbi ir kai nesvarbi. Aiškinamasi, kaip apskaičiuoti rinkinių variantų skaičių, atsižvelgiant į elementų tvarkos rinkinyje svarbą. Aptariama, kada, skaičiuojant rinkinių variantų skaičių, patogiu naudotis kombinatorikos sudėties ir daugybos taisyklėmis. Rinkinių sudarymo įgūdžiai taikomi, sprendžiant tikimybių uždavinius. **Mokomasi įvertinti atsitiktinio įvykio tikimybę**, renkant duomenis apie atsitiktinį procesą ir stebint jo ilgalaikį santykinį dažnį bei gautą rezultatą, palyginant su **teorine šio įvykio tikimybe** (pavyzdžiui, šešiasienio kauliuko ridenimas iki 600 kartų ir kauliuko atvartimo šešiomis akutėmis stebėjimas).

IV gimnazijos klasė. Bendrasis kursas.

Sprendžiant uždavinius, **taikoma tikimybės apibrėžimas** ir tikimybių savybės: būtinąjį įvykio tikimybė $P(\text{būtinąjo}) = 1$, negalimojo įvykio $P(\text{negalimojo}) = 0$, vienas kitam priešingų įvykių tikimybių suma $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Nagrinėjami paprasčiausi dviejų trijų etapų bandymai (stochastiniai bandymai) ir su jo etapais susiję **nepriklausomi ar priklausomi įvykiai** (negrąžintinio ir grąžintinio ėmimo atvejai). Braižomi tikimybių medžiai ir analizuojami su bandymu susiję nesutaikomi įvykiai, **mokomasi be formulių apskaičiuoti** įvykių „A arba B“, „A ir B“ tikimybes, atkreipiamas dėmesys į jungtukų „ir“ bei „arba“ esmę. Aptariama, kokie bandymo (stochastinio bandymo) įvykiai vadinami elementariais, o kokie – sudėtiniais. Mokomasi atpažinti ir formuluoti su bandymu susijusius sudėtinius įvykius, apskaičiuoti jų tikimybes. Nagrinėjant pavyzdžius, aptariama, kokie **įvykiai vadinami nesutaikomais, sutaikomais**. Mokomasi tokiems įvykiams palankias baigtis pavaizduoti Veno diagramomis, galimybių medžiais, galimybių lentelėmis. Praktikuojamasi apskaičiuoti įvykių tikimybes.

IV gimnazijos klasė. Išplėstinis kursas.

Rinkiniai: kėliniai, gretiniai, deriniai. Nagrinėjami elementų rinkiniai, kurie sudaromi, elementus imant iš vienos aibės, dviejų ar daugiau aibių. Aiškinamasi, kuo skiriasi tokie galimi sudaryti rinkiniai (elementais, elementų tvarka), kaip, naudojantis kombinatorikos daugybos taisykle, galima apskaičiuoti sudaromų rinkinių skaičių (pavyzdžiais iliustruojama kombinatorikos sudėties taisyklė). Apibrėžiamos sąvokos: kėliniai, gretiniai ir deriniai; pateikiamos ir pagrindžiamos jų skaičių radimo formulės, pastebint šių formulių tarpusavio ryšį. Pateikiami ir nagrinėjami derinių skaičiaus formulės taikymai – Bernulio bandymų formulėje, Niutono binomo formulėje. Sprendžiant kombinatorikos uždavinius (nustatant rinkinių skaičių), mokomasi naudotis galimybių medžiais, galimybių lentelėmis ar kitaip surašyti reikiamus rinkinius.

Klasikiniai ir neklasikiniai **tikimybiniai modeliai**. Analizuojama, kuo tikimybių teorija yra reikšminga kasdieniame gyvenime. Plėtojama medžiaga, susijusi su klasikiniiais (kai visų bandymo baigčių tikimybės yra vienodos) ir neklasikiniais (kai ne visų bandymo baigčių tikimybės yra vienodos) tikimybiniais bandymais. Analizuojamos sąvokos: klasikinis ir neklasikinis tikimybiniai bandymai, bandymo baigtis (elementarusis įvykis), bandymo įvykis, įvykiui palankios ar nepalankios baigtys, būtinasis įvykis, negalimasis įvykis, nesutaikomieji įvykiai, sutaikomieji įvykiai, **nepriklausomieji įvykiai**, priklausomieji įvykiai, bandymo baigties ar įvykio tikimybė, tikimybių savybės, Bernulio (binominiai) bandymai. Mokomasi pagrįsti pavyzdžiais ir įrodyti tikimybių savybes: būtinojo įvykio, negalimojo įvykio, vienas kitam priešingųjų įvykių, visų elementariųjų įvykių sumos, nesutaikomųjų įvykių, nepriklausomųjų įvykių, sutaikomųjų įvykių. Sprendžiant uždavinius, mokomasi apskaičiuoti: bandymo baigties ar įvykio tikimybę, ją nurodyti intervalo $[0;1]$ skaičiumi ir procentais; tikimybę, kad atliekant bandymą įvyks kuris nors iš dviejų nesutaikomųjų įvykių; tikimybę, kad atliekant bandymą įvyks abu tarpusavyje nepriklausomieji įvykiai; tikimybę, kad atliekant bandymą įvyks kuris nors iš dviejų sutaikomųjų įvykių; su Bernulio bandymais susijusias tikimybes.

Atsitiktiniai dydžiai. Įvedamos atsitiktinio dydžio ir jo skirstinio sąvokos; pateikiama atsitiktinių dydžių ir jų skirstinių pavyzdžių. Mokomasi sudaryti atsitiktinio dydžio **skirstinio lentelę**, apskaičiuoti jo matematinę viltį (atsitiktinio dydžio vidurkį), standartinę nuokrypį ir dispersiją. Analizuojamos šios skaitinės charakteristikos. Aptariama, kaip grafiškai atrodo **normalusis (Gauso) skirstinys**, kokios savybės jam būdingos. Nagrinėjami realių atsitiktinių dydžių, kurių skirstinys yra normalusis, pavyzdžiai.

Asmeninė kokio nors rezultato tikimybė yra skaičius nuo 0 iki 1, išreiškiantis individo sprendimą apie to rezultato galimybę.

Empirinė tikimybė – statistinis dažnis.

Tikimybė, kaip matematinis įrankis galimybei išmatuoti, santykis su statistiniu dažniu.

Tikimybė kaip modelis.

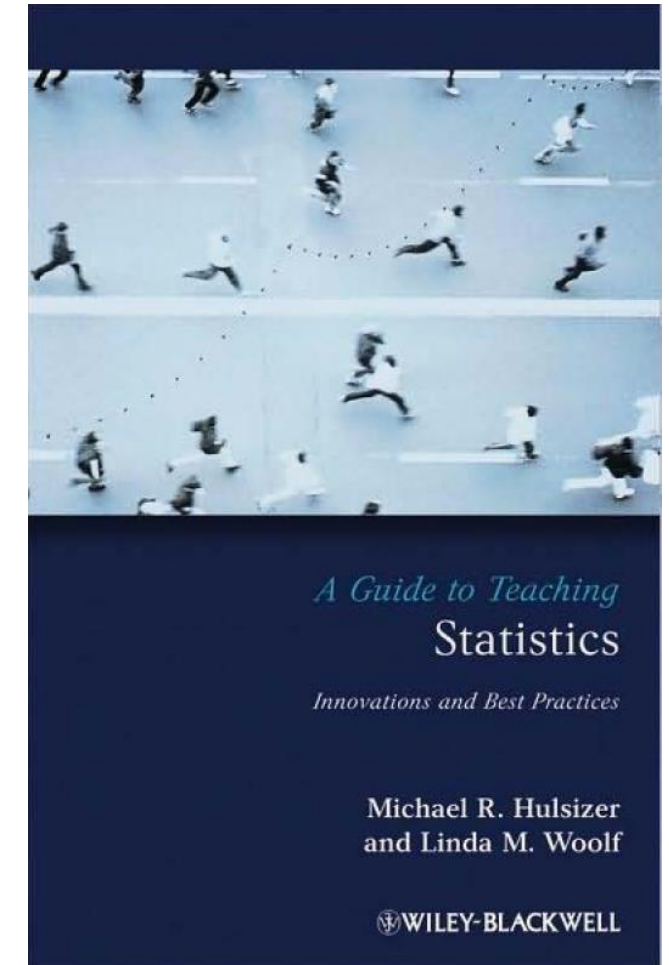
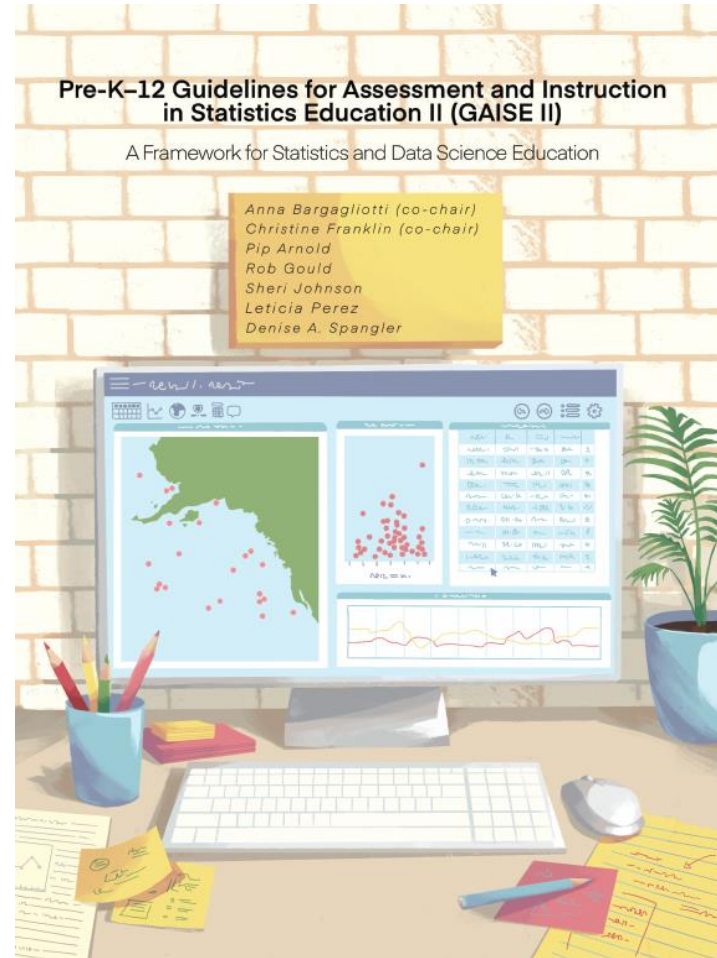
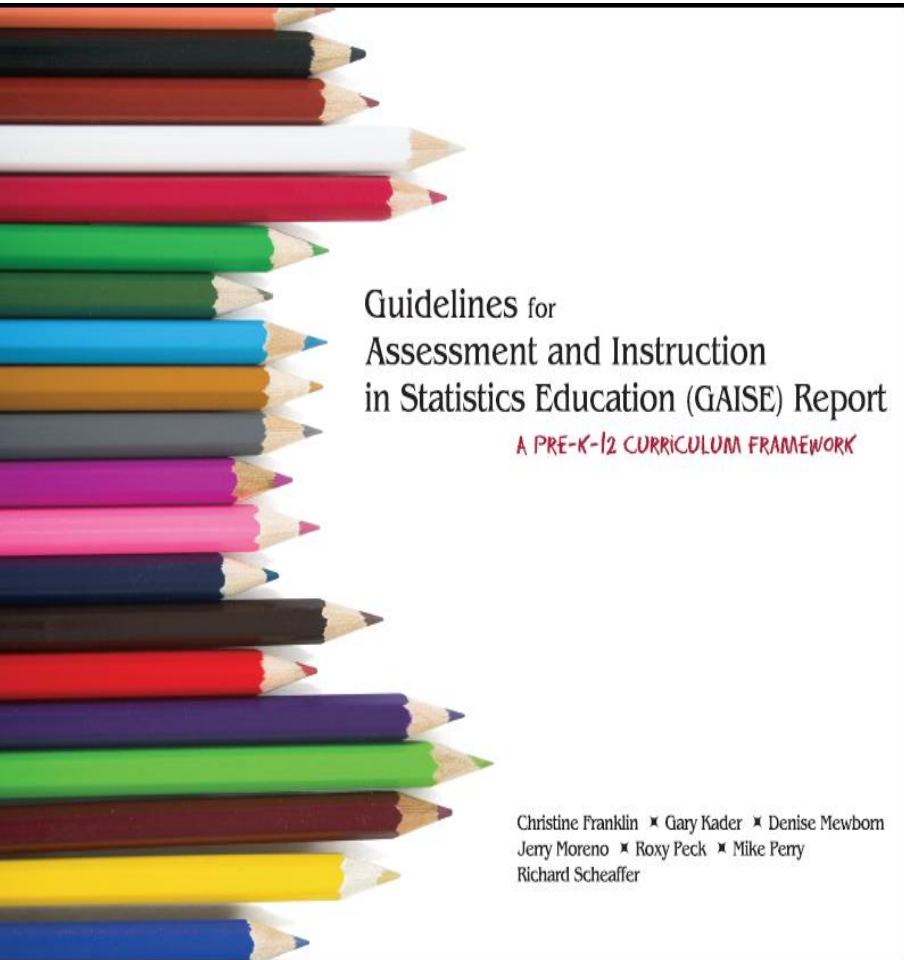
Tikimybė sąryšyje su statistika

Ugdyti mąstymą: „kas būtų, jei tai darytume daug kartų“

Imitaciniai eksperimentai.

Šaltiniai

Vilnius
University





Nauja kometa



**Vilnius
University**

alfredas.rackauskas@mif.vu.lt

VU. MIF, Statistinės analizės katedra

Naugarduko 24

Vilnius